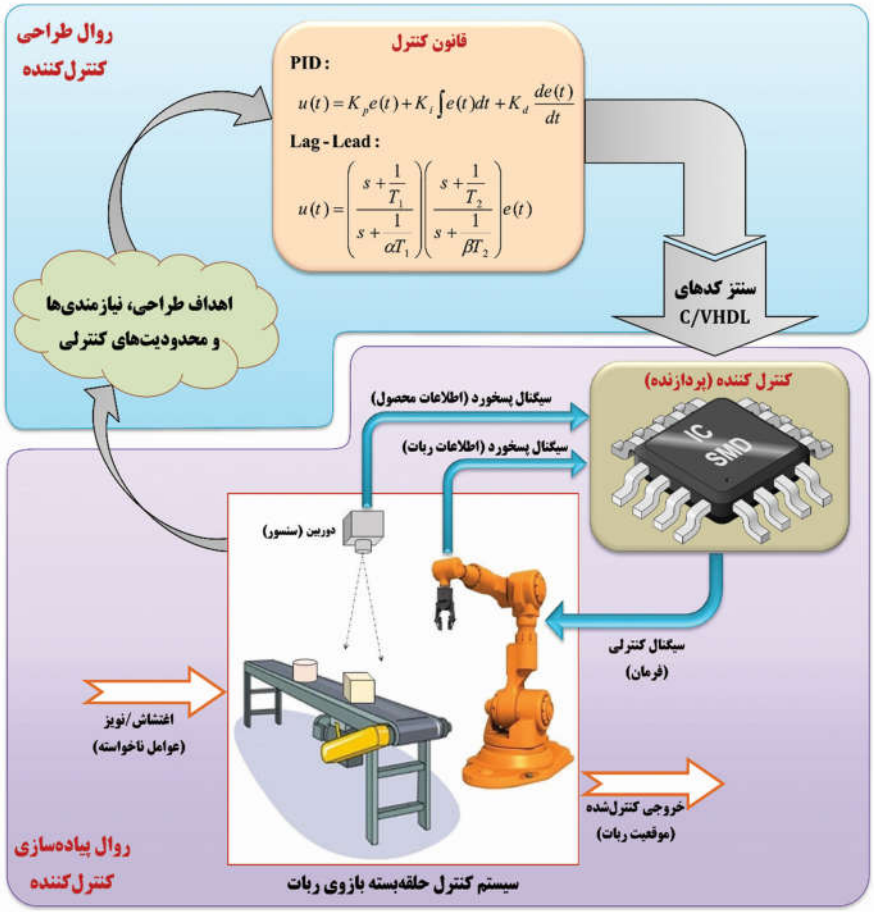
نظریه سیستم‌های کنترل اتوماتیک



تألیف: دکتر فرهاد بیات

عضو هیأت علمی دانشگاه زنجان

نظریه سیستم‌های کنترل اتوماتیک

تألیف: دکتر فرهاد بیات

Theory of Automatic Control Systems

By:

Farhad Bayat (Ph.D)

نظریه سیستم های کنترل اتوماتیک یکی از علوم بین‌رشته‌ای بسیار پویا و مهم از مهندسی و ریاضیات کاربردی به‌حساب می آید که به بررسی رفتار سیستم های دینامیکی و چگونگی تحت اختیار درآوردن آن رفتار می‌پردازد. در حالت کلی سیستم‌های کنترلی به دو دسته حلقه‌باز و حلقه بسته تقسیم می‌شوند. مبانی نظری سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته در قرن ۱۸ برای کنترل سیستم گاورنر آغاز و به‌سرعت در قرون بعدی توسعه یافت. در ساده‌ترین شکل، در یک سیستم کنترل حلقه‌بسته رفتار سیستم (خروجی) توسط ابزار مناسبی (حس‌گر) اندازه گیری شده و فاصله آن از رفتار مطلوب (خطا) تعیین می‌شود. سپس سیگنال خطا توسط بخشی به نام کنترل کننده پردازش شده و با صدور فرمان مناسب، تغییرات لازم در ورودی سیستم توسط ابزاری به نام عملگر اعمال می‌شود به‌گونه‌ای که رفتار سیستم به رفتار مطلوب نزدیک شود. امروزه نظریه سیستم‌های کنترل اتوماتیک به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم در تمام حوزه‌های علوم مختلف قابل‌مشاهده است. برای مثال اتوماسیون صنعتی، هوانوردی و فضانوردی، خودروسازی، رباتیک، پتروشیمی و حتی علوم پزشکی و اقتصاد را می‌توان نام برد. در تألیف این کتاب با تمرکز بر سیستم‌های دینامیکی خطی و تغییرناپذیر بازمان سعی شده‌است روش‌ها و اصول حاکم بر نظریه سیستم‌های کنترل اتوماتیک به گونه‌ای پوشش داده شوند که خواننده صرفاً با اتکا به مطالب این کتاب قادر خواهد بود به طراحی و تحلیل سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته بپردازد.

ISBN:978-964-8885-81-1

نظریه‌ی سیستم‌های کنترل اتوماتیک

دکتر فرهاد بیات

عضو هیئت علمی دانشگاه زنجان

دانشگاه زنجان

سرشناسه	: بیات، فرهاد، ۱۳۶۰
عنوان و نام پدیدآور	: نظریه سیستم‌های کنترل اتوماتیک/ تالیف فرهاد بیات.
مشخصات نشر	: زنجان: دانشگاه زنجان، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری	: ۴۲۴: مصور، جدول، نمودار.
شابک	: ۹۷۸-۹۶۴-۸۸۸۵-۹۰-۳
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
موضوع	: مهندسی سیستم‌ها --
موضوع	: مهندسی کنترل
شناسه‌ی افزوده	: دانشگاه زنجان
شناسه‌ی افزوده	: دانشگاه زنجان
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۹۶ ع‌ن۹ب/TJ۲۱۳
رده‌بندی دیویی	: ۶۲۹/۸۳
شماره‌ی کتاب‌شناسی ملی	: ۴۸۲۲۶۰۳

دانشگاه زنجان

نام کتاب	: نظریه‌ی سیستم‌های کنترل اتوماتیک
تألیف	: دکتر فرهاد بیات
ویراستار	: دکتر محمد ابراهیم‌پور
طرح جلد	: لیلا احدی
صفحه‌آرایی	: لیلا احدی
سال انتشار	: ۱۳۹۶
نوبت انتشار	: چاپ اول
شمارگان	: ۱۱۰۰
قیمت	: ۲۷۵۰۰ تومان
ناشر	: انتشارات دانشگاه زنجان
نشانی	: زنجان، کیلومتر ۵ جاده تبریز، دانشگاه زنجان، انتشارات دانشگاه زنجان
تلفن	: ۰۲۴۳۳۰۵۲۶۴۱

پیشگفتار

«کنترل» در لغت به معنی تحت اختیار درآوردن است. در این کتاب، مقصود از کنترل اتوماتیک یک سیستم دینامیکی عبارت است از تحت اختیار درآوردن رفتار و عملکرد آن سیستم بدون دخالت انسان. بر این اساس، نظریه سیستم‌های کنترل اتوماتیک به بیان اصول، قوانین و روش‌های تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل اتوماتیک می‌پردازد.

بسیاری معتقد هستند که نظریه کنترل اتوماتیک در اوایل قرن ۱۸ همزمان با توسعه ماشین‌های بخار و اختراع سیستم گاورنر توسط جیمز وات شروع و پس از آن به سرعت توسعه پیدا کرد. امروزه بواسطه پیشرفت‌های شگرف در حوزه‌های مختلف علوم و تکنولوژی و نیاز مبرم به افزایش سرعت، دقت و کارایی در انجام کارها، دامنه کاربرد نظریه سیستم‌های کنترل اتوماتیک منحصر به مهندسین کنترل نبوده و این علم به عنوان یکی از مهم‌ترین شاخه‌های علوم بین رشته‌ای در مهندسی و ریاضیات به حساب می‌آید. برای مثال کاربردهای بسیاری را می‌توان در صنایع خودروسازی، دریانوردی، فضانوردی و هوانوردی، صنایع پالایشگاهی، کشاورزی، پزشکی و حتی علوم اقتصادی و مدیریتی مشاهده نمود. همین امر باعث شده است که نظریه سیستم‌های کنترل اتوماتیک نه تنها به عنوان چندین واحد درس اصلی در دپارتمان‌های مهندسی برق و کامپیوتر تدریس شود بلکه در سایر شاخه‌های دانشگاهی مانند مهندسی مکانیک، هوافضا، مهندسی شیمی، مهندسی سازه و نیز اقتصاد تدریس شود.

کتاب حاضر مطابق با سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و

فناوری برای درس سیستم‌های کنترل خطی در مقطع کارشناسی تألیف شده و می‌تواند بعنوان یک مرجع مناسب و کامل برای دانشجویان این مقطع استفاده شود. از سوی دیگر، با توجه به اینکه کتاب حاضر تمام مباحث مقدماتی تا پیشرفته در حوزه سیستم‌های کنترل خطی کلاسیک را پوشش می‌دهد لذا می‌تواند به عنوان مرجعی مناسب برای مهندسین، محققین و دانشجویان مقاطع کارشناسی ارشد و دکترا در رشته‌های مختلف مورد استفاده واقع شود.

این کتاب ثمره سال‌ها تدریس مداوم اینجانب در دانشگاه بوده و برگرفته از تجربیات حاصل از بازخوردهای کمی و کیفی دانشجویان رشته‌های مختلف در فراگیری این درس بوده است. بر این اساس، سعی شده است مفاهیم اولیه تا روش‌های پیشرفته کنترلی به گونه‌ای سهل الوصول بیان شوند که منجر به حداکثر فراگیری در دانشجویان شود. از نگاه بسیاری از دانشجویان، یکی از اشکالات اساسی در اغلب مراجع بین المللی موجود در این زمینه، حجیم بودن و تفصیل‌های بیش از حد مباحث در آن‌ها است که این امر بهره گیری از آن‌ها را برای دانشجویانی که در ابتدای راه فراگیری این درس هستند دشوار و زمان‌بر می‌سازد. بنابراین، در کتاب حاضر تلاش زیادی برای رفع این مسأله صرف شده است به گونه‌ای که تمام مباحث بدون کم و کاست و به‌صورتی کاملاً خلاصه و موجز به خواننده منتقل شوند. همچنین، به منظور ارتقاء سطح یادگیری و آشنایی خواننده با ابزارهای روزآمد، اغلب مثال‌های حل شده در این کتاب توسط نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی شده و کدهای مربوطه در وب‌گاه مولف به نشانی www.znu.ac.ir/members/bayat_farhad قابل دسترسی می‌باشند.

با توجه به اینکه فراگیری نظریه سیستم‌های کنترل نیازمند آشنایی اولیه با اصول حاکم بر سیستم‌های دینامیکی می‌باشد، لذا توصیه می‌شود خواننده پیش از پرداختن به مطالعه این کتاب حداقل یکی از دروس معادلات دیفرانسیل، ریاضیات مهندسی و آشنایی با سیستم‌های دینامیکی را گذرانده باشد. مطالب ارائه شده در این کتاب در هشت فصل دسته‌بندی شده‌اند. در فصل اول کتاب، به بیان مفاهیم اولیه و آشنایی با سیستم‌های کنترل اتوماتیک و پسخوردی پرداخته شده است. همچنین تاریخچه‌ای مختصر از روند پیدایش و توسعه این شاخه از علم ارائه و مثال‌هایی واقعی از سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته ارائه شده است. در فصل دوم، به بررسی روش‌های مدلسازی سیستم‌های دینامیکی خطی و تغییرناپذیر بازمان پرداخته شده است. در این خصوص، به اختصار اصول مدلسازی دسته‌ای از سیستم‌های الکتریکی، مکانیکی و سیالاتی مورد توجه قرار گرفته است. روش مدل‌سازی تابع تبدیل بعنوان یک روش استاندارد در این بخش ارائه و الگوریتمی

جهت تعیین تابع تبدیل شبکه‌های پسخوردی گسترده بیان شده است (روش میسون). در فصل سوم، مشخصات و ویژگی‌های سیستم‌های کنترل پسخوردی مانند مزایای شبکه‌های پسخوردی، انواع اهداف کنترلی، محدودیت‌های طراحی و مفهوم حساسیت بیان شده‌اند. در فصل چهارم، روش محاسبه پاسخ حوزه زمان سیستم‌های دینامیکی خطی و تغییرناپذیر بازمان بیان شده است. به‌صورت خاص، پاسخ زمانی سیستم‌های دینامیکی مرتبه اول و دوم به عنوان مهمترین و پرکاربردترین دسته از سیستم‌ها مورد توجه قرار گرفته و مشخصات اساسی پاسخ این سیستم‌ها استخراج شده‌اند. مفهوم کاهش مرتبه سیستم‌های مرتبه بالا به سیستم‌های مرتبه پایین در این بخش ارائه شده است. با تقسیم پاسخ زمانی به دو بخش پاسخ گذرا و پاسخ حالت ماندگار در این فصل به بیان ویژگی‌های هریک از این بخش‌ها پرداخته شده است. همچنین، مفاهیم صفر و قطب و مفهوم پایداری سیستم حلقه‌بسته بر اساس محل قرارگیری قطب و نیز روش تحلیل پایداری راث-هرویتز در این فصل ارائه شده‌اند. در فصل پنجم، یکی از مهمترین روش‌های تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته تحت عنوان رویکرد مکان هندسی ارائه شده است. ابتدا روش رسم مکان هندسی قطب‌های حلقه‌بسته بیان شده و سپس با معرفی انواع جبران‌سازها (پیش‌فاز، پس‌فاز و پس‌فاز-پیش‌فاز) به بیان روش‌های طراحی این جبران‌سازها با رویکرد مکان هندسی پرداخته شده است. در فصل ششم، رویکرد دیگری تحت عنوان پاسخ فرکانسی مطرح و با ارائه انواع روش‌های رسم پاسخ فرکانسی (نمودار قطبی یا نایکوئیست، نمودار بودی یا لگاریتمی و نمودار نیکولز)، به بیان الگوریتم طراحی جبران‌سازهای مختلف با استفاده از رویکرد پاسخ فرکانسی پرداخته شده است. در فصل هفتم، کلاس بسیار مهمی از کنترل‌کننده‌های صنعتی با نام کنترل‌کننده‌های تناسبی-انتگرالی-مشتقی (PID) معرفی و اصول طراحی و تنظیم این کنترل‌کننده‌ها بیان شده‌اند. نهایتاً درفصل هشتم، به ارائه یکی از رویکردهای نوین کنترل سیستم‌های دینامیکی در حوزه زمان پرداخته شده است. در این فصل ابتدا روش مدل‌سازی فضای حالت بجای مدل تابع تبدیل بیان شده است. سپس، ساختار کنترل‌کننده فیدبک حالت و روش طراحی بهره فیدبک حالت برای دستیابی به اهداف کنترلی بیان شده است. همچنین، مفهوم مشاهده‌گر حالت برای تخمین حالت‌های سیستم در شرایطی که امکان اندازه‌گیری حالت‌ها وجود ندارد، و نیز روش طراحی آن بیان شده است.

برخود لازم می‌دانم از خانواده عزیزم، دانشجویان پرتلاش دانشگاه زنجان، همکاران محترم و تمام عزیزانی که به هر نحوی در ایجاد این اثر نقشی داشته‌اند تقدیر و تشکر نمایم.

به‌عنوان سخن آخر، باور دارم عاری از ایراد بودن مختص ذات پروردگار متعال است و یقیناً

تألیف این کتاب نیز از این قاعده مستثنی نیست. از همین روی باکمال احترام پذیرای هرگونه نقد و اشکال احتمالی از سوی خوانندگان محترم در خصوص نگارش این کتاب هستم. همچنین امیدوارم با مطالعه کتاب حاضر خواننده قادر باشد به‌صورت تقریباً کامل تمام مفاهیم مربوط به سیستم‌های کنترل خطی را درک نموده و ویژگی‌های مربوط به هر یک از روش‌های تحلیل و طراحی را تشخیص داده و در نهایت بتواند در عمل آن‌ها را به‌کار بندد.

فرهاد بیات
عضو هیئت‌علمی دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان
اردیبهشت ماه ۱۳۹۶ شمسی

فهرست

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ۳

فصل اول: آشنایی با سیستم های کنترل

مقدمه (تاریخچه) ۱۳
مبانی و تعاریف ۱۶
مثال‌هایی از سیستم‌های کنترل پسخوردی ۲۰
پیوست الف: تبدیل لاپلاس ۲۴
مسائل ۳۲

فصل دوم: مدل سازی سیستم های دینامیکی

مقدمه ۳۷
مدل تابع تبدیل ۳۸
مدل‌سازی سیستم‌های الکتریکی ۴۰
مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی ۴۵
مدل‌سازی سیستم‌های سیالاتی ۵۵
نمایش بلوکی سیستم‌های کنترل ۶۰
روش میسون ۶۸
مسائل ۷۷

فصل سوم: مشخصا ت سیستم های کنترل پسخوردی

مقدمه ۸۵
مشخصات سیستم‌های کنترل پسخوردی ۸۵
اهداف کنترلی و محدودیت‌های طراحی ۸۷
مفهوم حساسیت و تأثیر پسخورد بر آن ۹۰
مسائل ۹۵

فصل چهارم: پاسخ زمانی سیستم های دینامیکی

مقدمه ۹۹
پاسخ زمانی ۹۹
پاسخ زمانی سیستم‌های مرتبه اول ۱۰۲
پاسخ زمانی سیستم‌های مرتبه دوم ۱۰۷

عنوان **صفحه**

ویژگی‌های اساسی پاسخ گذرای سیستم مرتبه دو استاندارد ۱۲۰
ارتباط میان محل قطب‌های سیستم و مشخصات پاسخ گذرا ۱۳۳
پاسخ سیستم‌های مرتبه بالا و کاهش مرتبه سیستم‌ها ۱۳۷
اثر اضافه‌کردن صفر بر پاسخ سیستم مرتبه دو ۱۴۳
پاسخ حالت ماندگار سیستم‌ها (خطای ماندگار) ۱۴۷
پایداری سیستم‌های کنترل ۱۵۵
معیار پایداری راث- هرویتز ۱۵۶
تحلیل پایداری نسبی ۱۶۷
مسائل ۱۷۱

فصل پنجم: تحلیل و طراحی سیستم های کنترل با رویکرد مکان هندسی

مقدمه ۱۷۷
روش ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها ۱۷۸
پیچیدگی‌های رسم مکان هندسی ریشه‌ها ۲۰۲
ساختارهای استاندارد دیگر در رسم مکان هندسی ریشه‌ها ۲۱۳
اثر اضافه‌کردن صفر و قطب بر مکان هندسی ریشه‌ها ۲۲۲
تحلیل پایداری با استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌ها ۲۲۷
طراحی کنترل‌کننده با استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌ها ۲۳۱
طراحی جبران‌ساز پیش‌فاز با رویکرد مکان هندسی ریشه‌ها ۲۳۳
طراحی جبران‌ساز پس‌فاز با رویکرد مکان هندسی ریشه‌ها ۲۵۱
پیاده‌سازی عملی جبران‌سازهای پیش‌فاز و پس‌فاز ۲۶۲
طراحی جبران‌ساز پس‌فاز-پیش‌فاز با رویکرد مکان هندسی ریشه‌ها ۲۶۳
مسائل ۲۷۵

فصل ششم: تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل با رویکرد پاسخ فرکانسی

مقدمه ۲۸۵
پاسخ حالت دائمی سینوسی ۲۸۶
رسم نمودار قطبی ۲۸۷
محک پایداری نایکوئیست ۲۹۷
رسم نمودار نایکوئیست برای سیستم‌هایی با صفر/قطب روی محور موهومی ۳۱۰
معیارهای پایداری نسبی (حاشیه بهره و حاشیه فاز) ۳۱۴

عنوان **صفحه**

رسم نمودار بودی یا لگاریتمی ۳۱۸
تفاوت نمودار بودی سیستم‌های مینیمم‌فاز و غیرمینیمم‌فاز ۳۳۳
تأثیر تأخیر انتقالی بر نمودار بودی ۳۴۳
رسم نمودار نیکولز ۳۴۷
طراحی کنترل‌کننده با استفاده از روش پاسخ فرکانسی ۳۴۸
طراحی جبران‌ساز پیش‌فاز با رویکرد پاسخ فرکانسی ۳۵۰
طراحی جبران‌ساز پس‌فاز با رویکرد پاسخ فرکانسی ۳۵۸
طراحی جبران‌ساز پس‌فاز–پیش‌فاز با رویکرد پاسخ فرکانسی ۳۶۴
نکاتی در خصوص جبران‌سازها ۳۷۱
مسائل ۳۷۲

فصل هفتم: اصول کنترل کننده های PID

مقدمه ۳۷۹
اجزاء کنترل‌کننده PID 379
عملکرد کنترل تناسبی (P) ۳۸۱
عملکرد کنترل تناسبی–انتگرالی (PI) ۳۸۵
قواعد زیگلر–نیکولز برای تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده PID 390
مسائل ۴۰۲

فصل هشتم: تحلیل و طراحی سیستم های کنترل در فضای حالت

مقدمه ۴۰۹
ارتباط معادلات فضای حالت و تابع تبدیل ۴۱۷
حل معادلات حالت و مفهوم ماتریس انتقال حالت ۴۱۹
طراحی کنترل‌کننده پسخورد حالت ۴۲۳
مشاهده‌گر حالت ۴۳۶
طراحی مشاهده‌گر حالت ۴۳۸
اصل همزادی ۴۴۱
مسائل ۴۵۴
منابع ۴۵۷
فهرست واژگان ۴۵۹

۱

آشنایی با سیستم های کنترل

هدف کلی

- آشنایی با مفاهیم پایه، ساختار و عملکرد سیستم‌های کنترل پسخوردی.

اهداف یادگیری

- آگاهی از تاریخچه پیدایش و توسعه سیستم‌های کنترلی.
- درک مبانی و آشنایی با اجزاء اصلی سیستم‌های کنترل پسخوردی.
- آشنایی با ساختار کنترل حلقه‌بسته و حلقه‌باز و مزایای آن‌ها.

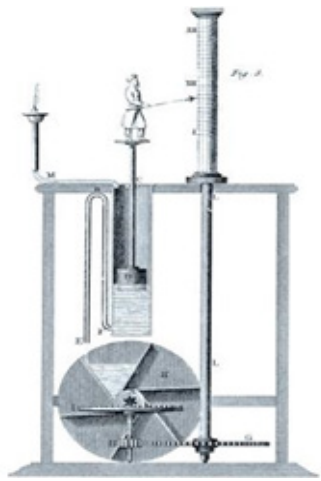
مقدمه (تاریخچه)

بسیاری از محققان معتقدند که سیستم‌های کنترل پسخوردی برای مدتی بیش از ۲۰۰۰ سال شناخته و به‌کار گرفته شده‌اند. یکی از نخستین نمونه‌های در دسترس، ساعت آبی‌اي است که به تسیبایوز[1] نسبت داده می‌شود (۲۲۲-۲۸۰ قبل از میلاد مسیح). در شکل ۱-۱ نمایی از یک ساعت آبی نشان داده شده است. با وجود این، شاید مهم‌ترین تحول و توسعه به‌وجودآمده در زمینه سیستم‌های کنترل خودکار در قرن ۱۸ و با اختراع سیستم گاورنر توسط جیمز وات برای کنترل سرعت در ماشین‌های بخار حاصل شد (شکل ۱-۲). جیمز وات طرح اولیه خود را در سال ۱۷۸۸ ارائه کرد و در اوایل ۱۷۸۹ برای نخستین بار از آن استفاده شد. گاورنر اولیه‌ی وات معایب متعددی داشت ازجمله: اینکه تنها کنترل تناسبی توسط آن امکان‌پذیر بود و ازاین‌رو کنترل دقیق سرعت تنها در یک نقطه کار ثابت فراهم می‌شد. دیگر آنکه سیستم اولیه گاورنر تنها در محدوده‌اي کوچک از سرعت قابلیت عمل داشت و نیز نیازمند نگهداری بسیار دقیق بود. تلاش‌های گسترده‌ای در قرن ۱۹ به‌منظور بهبود عملکرد گاورنر وات و حذف خطای ذاتی آن انجام شد و سرانجام مکانیزمی توسط ویلیام زیمنس ارائه شد که عملکرد تناسبی در گاورنر وات را با عملکرد انتگرالی جایگزین نمود و درنتیجه امکان حذف خطا و تعقیب نقاط مرجع غیر ثابت را فراهم نمود.

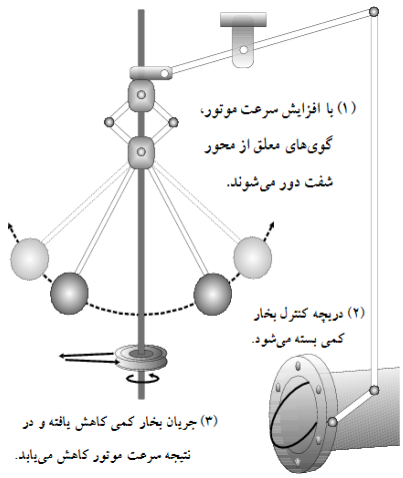
در اوایل قرن ۱۹ گزارش‌هایی از مشکلات به‌وجودآمده توسط سیستم گاورنر ارائه می‌شد که مبین بروز ناپایداری در عملکرد گاورنر بود. همین مسئله باعث شد که تلاش‌های بسیاری به‌منظور تعیین شرایط عملکرد پایدار گاورنر انجام گیرد. در همین راستا و در سال‌های ۱۸۲۶ تا ۱۸۵۱ مقالات متعددی در خصوص توصیف عملکرد گاورنر توسط معادلات دیفرانسیل ارائه شد ولی تمام آن‌ها با

1. Ctesibios

مشکلاتي اساسی در تعیین شرایط پایداری مواجه بودند. در ۱۸۶۸، جیمز کلارک ماکسول چگونگی مدل‌سازی انواع مختلف مکانیزم‌های گاورنر توسط معادلات دیفرانسیل خطی را ارائه کرد. در این زمان ریاضی‌دانان و مهندسان دریافته بودند که پایداری/ ناپایداری یک سیستم دینامیکی توسط موقعیت ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم تعیین می‌شود. بنابراین چالش بعدی تعیین محل قرارگیری ریشه‌ها بدون محاسبه آن‌ها بود (مخصوصاً در شرایطی که معادله مشخصه از مراتب بالا بوده و حل آن در آن زمان عملاً امکان‌پذیر نبود). در این خصوص ماکسول شرایط لازم و کافی برای پایداری معادله مشخصه‌هایی تا مرتبه چهار را ارائه، و شرایط لازم را برای معادله مرتبه پنج تعیین کرد. در ۱۸۷۷ ادوارد راث با بهره‌گیری از فرمول‌بندی ماکسول، معیاری برای تعیین پایداری یک سیستم بدون حل معادله مشخصه آن ارائه کرد که تحت عنوان معیار پایداری راث-هرویتز معروف است. این روش در فصل‌های بعد بررسی خواهد شد.



شکل ۱-۱. نمونه‌ای از یک ساعت آبی منتسب به تسیبایوز.



شکل ۱-۲. سیستم گاورنر جیمز وات.

سال‌های نخستین قرن ۲۰ شاهد گسترش سریع و فراگیر کنترل‌کننده‌های پسخوردی بود که از آن جمله تنظیم ولتاژ، جریان و فرکانس، کنترل دیگ بخار، کنترل سرعت موتور الکتریکی، پایدارسازی و کنترل خودکار کشتی و فضاپیما، و نیز کنترل دما، فشار و جریان در صنایع فرایندی

را می‌توان نام برد. در بسیاری از این کاربردها کنترل‌کننده بدون داشتن اطلاعات دقیقی از سیستم موردنظر، طراحی و پیاده‌سازی می‌شد و با توجه به اینکه در اکثر این کاربردها صرفاً یک تنظیم‌کننده ساده مدنظر بود؛ بنابراین مشکل جدی از این بابت به‌وجود نمی‌آمد. با وجود این، در برخی از مسائل پیچیده مانند هدایت خودکار کشتی‌ها، مهندسان با سیستم‌های چندمتغیره، یعني سیستم‌هایی با چندین ورودی و خروجی متأثر از یکدیگر مواجه بوده و نیازمند بهره‌گیری از کنترل‌کننده‌های پیچیده‌تر بودند. در این خصوص، مینورسکی نشان داد که چگونه می‌توان پایداری را با استفاده از معادلات دیفرانسیل توصیف‌کننده سیستم تعیین کرد.

واژه «پسخورد» را نخستین بار در ۱۹۲۰ مهندسان حوزه ارتباطات رادیویی به‌منظور توصیف پارازیت به‌وجودآمده از پسخورد سیگنال خروجی مدار تقویت‌کننده به ورودی آن به‌کار بردند. در سال ۱۹۳۱ تقویت‌کننده‌های عملیاتی با پسخورد منفی توسط شرکت AT&T به‌کار گرفته شد ولی تا سال ۱۹۳۴ گزارشی در مجلات از آن ارائه نشد. توسعه و درک عملکرد تقویت‌کننده‌های پسخوردی توسط هَری نایکوئیست انجام گرفت و نتایج آن در سال ۱۹۳۲ منتشر شد که امروزه تحت عنوان روش تحلیل نایکوئیست شناخته می‌شود. این روش ابزاری ساده برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته را ارائه می‌کند که تنها بر اساس اطلاعات به‌دست‌آمده از پاسخ فرکانسی سیستم حلقه‌باز قابلِ‌حصول‌اند.

مهندسان مکانیک و فیزیک‌دانان در صنایع فرایندی در آمریکا، براي توسعه سیستماتیک ساختارهای کنترلی در کارخانه ذوب آهن تلاش می‌کردند که سرانجام روشی به‌منظور تنظیم بهینه کنترل‌کننده‌های تناسبی-انتگرالی (PI) و تناسبی-انتگرالی-مشتقی (PID) توسط زیگلر و نیکولز در سال ۱۹۴۲ ارائه شد که امروزه تحت عنوان قواعد تنظیم زیگلر-نیکولز شناخته می‌شوند.

گروه تحقیقاتی مهم دیگر، محققان دانشکده مهندسی برق دانشگاه MIT بودند که روش تحلیل حوزه زمان و به‌کارگیری دیاگرام‌های بلوکی را به‌منظور شبیه‌سازی سیستم‌های کنترلی ارائه کردند. با ظهور جنگ جهانی دوم، تمرکز بر دسته خاصی از سیستم‌های کنترلی قرار گرفت. یکی از مهم‌ترین مسائل در این خصوص کنترل توپ‌های ضدهواپیما بود که مسئله‌اي بسیار پیچیده به‌شمار می‌آمد و شاملِ تشخیص موقعیت هواپیما، محاسبه موقعیت آتی، و نهایتاً کنترل دقیق حرکت توپخانه بود. کارهای انجام‌شده در MIT نشان داد که چندین سیستم مکانیکی و الکتریکی را می‌توان توسط بلوک دیاگرام‌ها و توابع تبدیل مدل‌سازی کرد. پس از اتمام جنگ، جزئیات مربوط به پیشرفت‌های به‌دست‌آمده در کتاب تئوری سرومکانیزم‌ها به‌چاپ رسید.

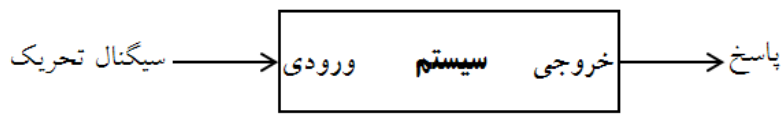
با ظهور کامپیوترهای دیجیتال در دهه ۱۹۶۰، بهره‌گیری از روش‌های حوزه زمان به‌منظور شبیه‌سازی سیستم‌های پیچیده و چندمتغیره امکان‌پذیر شد و به‌واسطه قابلیت‌های بالای این روش‌ها، نظریه‌های جدید کنترل اساساً بر مبنای روش‌های حوزه زمان مانند معادلات فضای حالت شکل گرفتند. امروزه، حوزه کاربرد سیستم‌های کنترل خودکار به‌قدری توسعه یافته است که عملاً امکان تعیین مرزي براي آن وجود ندارد. برخی از تحقیقات نظری که امروزه در زمینه سیستم‌های کنترل انجام می‌پذیرند عبارت‌اند از تئوری کنترل بهینه، کنترل مقاوم، کنترل غیرخطی، کنترل هوشمند، کنترل تطبیقی، کنترل سیستم‌های تصادفی، کنترل آشوب و غیره. این روش‌ها کاربردهای بسیار گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف مانند مهندسی، صنایع، سیستم‌های زیستی، اقتصادی، هواشناسی، دارویی و غیره یافته‌اند.

مبانی و تعاریف

پیش از آنکه بحث در خصوص تئوری سیستم‌های کنترل را شروع کنیم، لازم است برخی تعاریف و مبانی پایه در این زمینه را بیاموزیم.

سیستم: سیستم به مجموعه‌ای از اجزا گفته می‌شود که به‌صورت مناسبی به یکدیگر متصل شده و برای انجام وظیفه‌ای مشخص با هم کار می‌کنند. توجه داشته باشید که سیستم می‌تواند دارای ماهیت فیزیکی باشد مانند یک کشتی، فضاپیما، ربات و غیره، یا معرف فرایند پویای غیرفیزیکی‌اي باشد مانند سیستم‌های اجتماعی، اقتصادی و مانند آن.

ورودی/ خروجی سیستم: برای اینکه یک سیستم بتواند برای دستیابی به وظیفه‌اي خاص، عملکردی را از خود نشان دهد، لازم است که توسط عامل یا سیگنالي خارجی تحریک شود که آن را ورودی (سیگنال تحریک) می‌نامیم. عملکرد سیستم در مقابل اعمال ورودی را خروجی سیستم (پاسخ) مي‌نامیم (شکل ۱-۳).

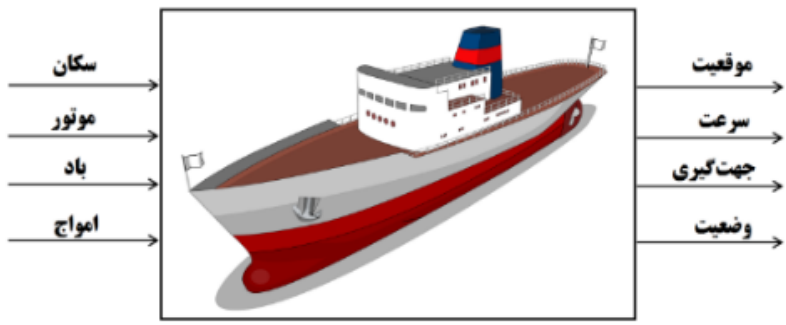


شکل ۱-۳. دیاگرام یک سیستم ساده و اجزای آن.

ورودی کنترلی/ اغتشاش: ورودی‌هایی که طراح با استفاده از آن‌ها عملکرد خروجی سیستم را تنظیم

می‌کند، ورودی کنترلی نامیده می‌شود. ورودی‌هایی را که بر روی رفتار خروجی سیستم تأثیرگذارند ولی در اختیار طراح نیستند اغتشاش می‌نامیم. ورودی اغتشاش موجب تغییرات ناخواسته در خروجی سیستم تحت کنترل می‌شود. برای مثال، یک کشتی را به‌عنوان یک سیستم در نظر بگیرید (شکل ۱-۴). ورودی‌های این سیستم شامل سکان، موتورها، باد و امواج دریا هستند و خروجی‌های سیستم عبارت‌اند از موقعیت کشتی، سرعت پیشروی، زاویه پیشروی و وضعیت بدنه (زوایای رول، پیچ و یاو). در این مثال، سکان و موتور کشتی به‌عنوان ورودی‌های کنترلی در نظر گرفته می‌شوند که برای کنترل خروجی‌های کشتی (موقعیت، سرعت، زاویه و وضعیت) به‌کار می‌روند. در مقابل باد و موج دریا طبیعتاً بر تمام خروجی‌ها اثر گذاشته و باعث انحراف آن‌ها از مقادیر مطلوب می‌شوند و درعین‌حال از اختیار طراح نیز خارج‌اند و درنتیجه به آن‌ها سیگنال‌های اغتشاش می‌گوییم.

سنسور (اندازه‌گیر): ابزاری را که مقادیر مربوط به متغیرهای مختلف سیستم (معمولاً خروجی) را اندازه‌گیری و در اختیار سایر بخش‌ها قرار می‌دهد سنسور می‌نامند.



شکل ۱-٤. کشتی به‌عنوان یک سیستم همراه با ورودی‌ها و خروجی‌های آن.

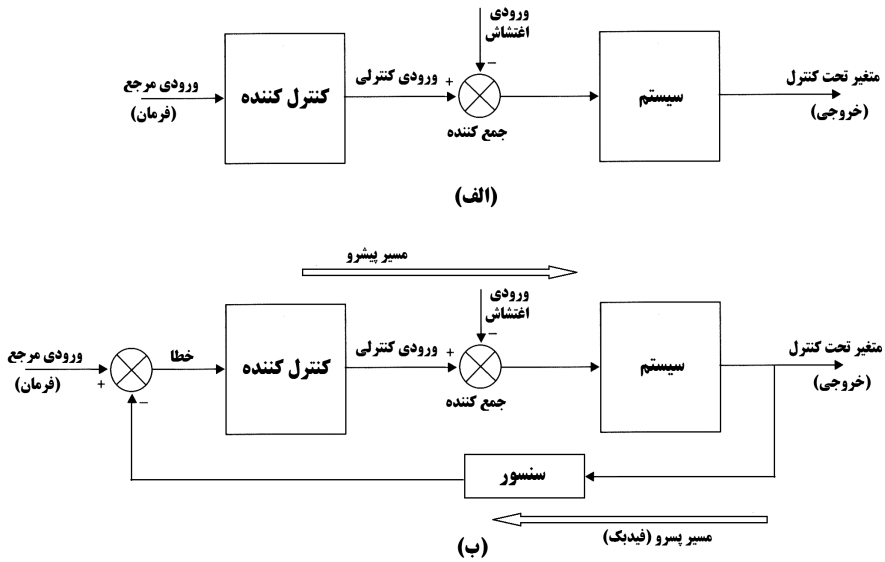
عملگر: به ابزاری که ورودی کنترلی را به سیستم تحت کنترل اعمال می‌کند، به اصطلاح عملگر گفته می‌شود.

کنترل/ کنترل‌کننده: مجموعه اقدامات و عملیاتی را که منجر به تحت اختیار گرفتن رفتار و عملکرد یک سیستم می‌شود به‌اصطلاح کنترل می‌نامیم. واحدی را که با انجام عملیات مناسب رفتار سیستم را تحت اختیار درمی‌آورد، کنترل‌کننده می‌نامیم.

کنترل حلقه‌باز و حلقه‌بسته

به آن دسته از سیستم‌های کنترلی که واحد کنترل‌کننده بدون توجه به خروجی سیستم و تنها بر اساس یک سری اطلاعات و داده‌های قبلی، عمل کنترل را انجام می‌دهد، سیستم کنترل حلقه‌باز گفته می‌شود. برای مثال، سیستم کنترل به‌کاررفته در ماشین‌های لباسشویی و یخچال‌های قدیمی، از نوع سیستم کنترل حلقه‌بازند. در یک سیستم کنترل حلقه‌باز، ورودی کنترلی هیچ تأثیری از خروجی سیستم تحت کنترل نمی‌پذیرد (ساختار یک سیستم کنترل حلقه‌باز در شکل ۱-۵-الف نشان داده شده است). مثلاً در یک ماشین لباسشویی قدیمی، سیستم کنترلی تنها بر اساس برنامه‌ای از قبل مشخص که توسط کاربر در ابتدای کار تعیین می‌شود، فرایند شستشو را آغاز و به انجام می‌رساند. در این مثال خروجی مطلوب سیستم، تمیزشدن لباس‌ها است. درحالی‌که کنترل‌کننده هیچ توجهی به میزان تمیزی و کیفیت لباس‌ها در حین فرایند شستشو نمی‌کند. این نوع از مکانیزم‌های کنترلی دارای ساختار بسیار ساده‌ای بوده و به‌راحتی قابل‌پیاده‌سازی‌اند. همچنین به دلیل عدم نیاز به استفاده از سنسورهای اضافی، بسیار ارزان و مقرون‌به‌صرفه‌اند. در مقابل، تصور کنید که شخصی به‌اشتباه لباس‌های تمیز را درون ماشین لباسشویی قرار داده و دکمه شروع را بزند. در این حالت کنترل‌کننده لباسشویی مطابق برنامه‌ای مشخص، عملیات شستشو را آغاز و به‌انجام خواهد رساند. این کار معادل است با اتلاف غیرضروری زمان و انرژی. این مسئله یکی از مشکلات اصلی سیستم‌های کنترل حلقه‌باز است.

یک سیستم حلقه‌بسته (پسخوردی) سیستمی است که در آن ورودی کنترلی تابعی از خروجی سیستم تحت کنترل است. بنابراین، هرگونه تغییر ناخواسته و انحراف به‌وجودآمده در خروجی سیستم به‌واسطه اغتشاش، توسط کنترل‌کننده احساس شده و کنترل‌کننده می‌تواند اثر آن را جبران کند. همان‌طور که در شکل ۱-۵-ب نشان داده شده است، در سیستم حلقه‌بسته، علاوه بر مسیر پیشرو، یک مسیر پسرو از خروجی سیستم تحت کنترل به ورودی کنترل‌کننده وجود دارد که این مسیر معرف عناصر اندازه‌گیر (سنسور) است. مزیت مهم سیستم کنترل حلقه‌بسته، توانایی آن در حذف اثر اغتشاش و نیز کاهش حساسیت سیستم نسبت به تغییرات ناخواسته در پارامترهای سیستم تحت کنترل است. در مقابل، سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته با چالشی به نام پایداری مواجه‌اند، درحالی‌که در سیستم‌های حلقه‌باز چنین مشکلی اساساً وجود ندارد.



شکل ۱-۵. مقایسه ساختار (الف) کنترل حلقه‌باز و (ب) کنترل حلقه‌بسته.

مقایسه مزایا و معایب سیستم‌های کنترل حلقه‌باز و حلقه‌بسته

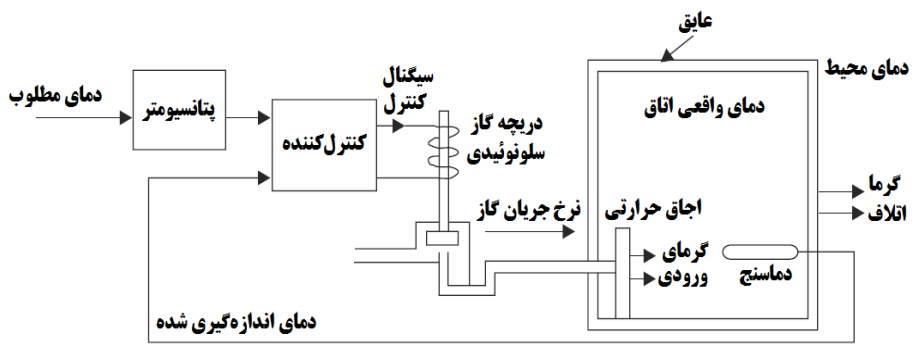
- ساختار سیستم‌های کنترل حلقه‌باز ساده‌تر و تعمیر و نگهداری آن راحت‌تر است.
- عدم نیاز به استفاده از سنسور در سیستم‌های کنترل حلقه‌باز و در نتیجه هزینه کمتر در مقایسه با سیستم‌های حلقه‌بسته متناظر.
- در سیستم‌های حلقه‌باز مشکل ناپایداری وجود ندارد، درحالی‌که این مسئله یک چالش اساسی در سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته است.
- اغتشاش موجب ایجاد خطا در سیستم‌های حلقه‌باز می‌شود و درنتیجه در این نوع سیستم‌ها دستیابی به کنترل دقیق عملاً مقدور نیست. درحالی‌که سیستم‌های حلقه‌بسته می‌توانند اثر اغتشاش را جبران کنند و دستیابی به کنترل‌های بسیار دقیق با راندمان بالا تنها با این روش مقدور است.
- در کاربردهای عملی، تغییر پارامترهای سیستم در حین کار یکی از مشکلات شایع است. این در حالی است که حساسیت سیستم‌های حلقه‌بسته نسبت به چنین تغییراتی عموماً بسیار کمتر از سیستم‌های حلقه‌باز است و از این نظر عملکرد بسیار بهتری از خود نشان می‌دهند.

مثال‌هایی از سیستم‌های کنترل پسخوردی

سیستم کنترل دمای محیط

در شکل ۱-۶ ساختار کلی یک سیستم کنترل دمای اتاق همراه با عناصر تشکیل‌دهنده آن را مشاهده می‌کنید. مقدار جریان گاز به گرمکن ورودی کنترلی، و دمای اتاق، خروجی سیستم‌اند. به‌منظور تنظیم دمای اتاق بر اساس مقدار تعیین‌شده توسط شخص (دمای مطلوب)، ابتدا دمای محیط توسط یک ترموکوپل (سنسور) اندازه‌گیری می‌شود و سپس با دمای مطلوب مقایسه شده و سیگنال خطا محاسبه می‌شود. سپس کنترل‌کننده بر اساس مقدار خطا، میزان جریان گاز به گرمکن (عملگر) را تنظیم می‌کند. در این مثال، باز و بسته‌شدن در و پنجره‌ها و تغییر دمای محیط خارج را می‌توان به‌عنوان ورودی‌های اغتشاش در نظر گرفت. وظیفه کنترل‌کننده آن است که با وجود ورودی‌های اغتشاش اشاره‌شده، دمای اتاق را بر اساس مقدار مطلوب تنظیم کند. در این کتاب، روش‌هایی را برای تحلیل و طراحی چنین سیستم‌های کنترلی‌اي خواهیم آموخت.

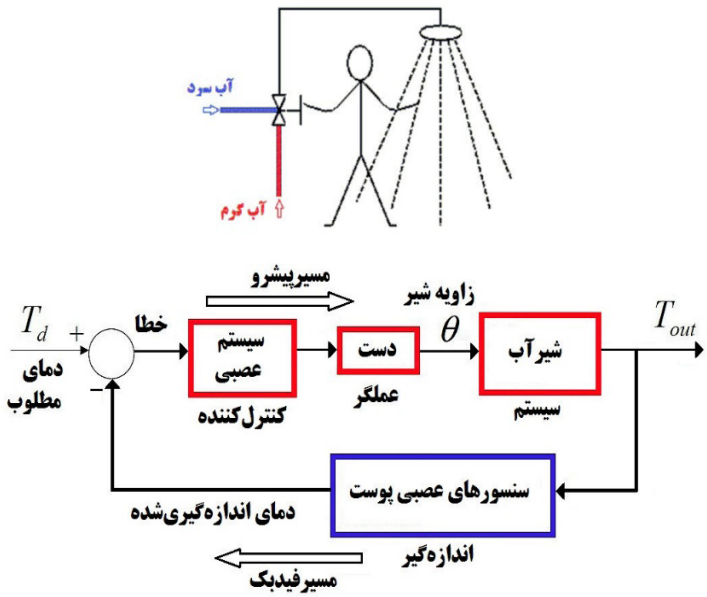
همه ما انسان‌ها بدون اینکه متوجه باشیم هرروزه از یکی از مصادیق جالبِ کنترل حلقه‌بسته دما استفاده می‌کنیم. برای روشن شدن موضوع، فرایند استحمام را در نظر بگیرید (شکل ۱-۷). هر شخصی دمای آب مشخصی را برای استحمام ترجیح می‌دهد. بر این اساس، فرایند تنظیم دمای آب به‌گونه‌ای انجام می‌گیرد که شخص احساس راحتی داشته باشد. برای این منظور، دمای آب در هر لحظه توسط سیستم عصبی که بر روی پوست شخص قرار دارد (سنسور) اندازه‌گیری شده و با دمای مطلوبی که شخص در نظر دارد مقایسه می‌شود. سپس مغز به‌عنوان کنترل‌کننده، تصمیم‌گیری کرده و فرمان مناسب را برای باز کردن/ بستن شیر آب گرم/ سرد (عملگر) صادر می‌کند. این کار تا جایی ادامه می‌یابد که دمای مناسب فراهم شود.



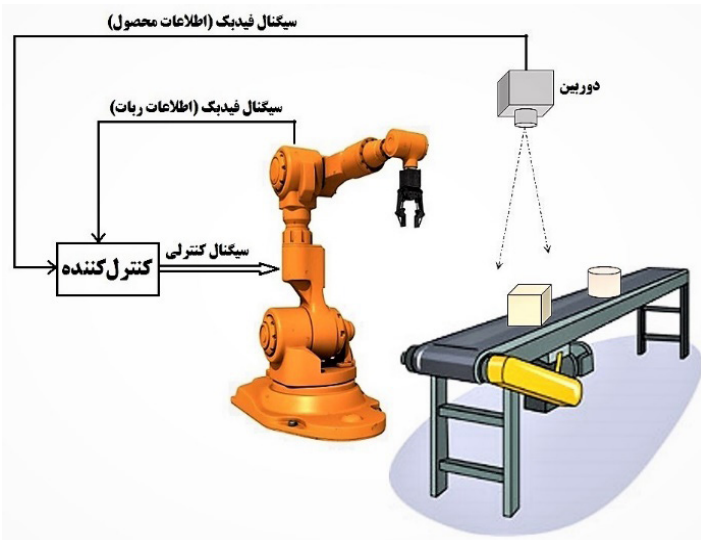
شکل ۱-٦. نمونه‌ای از سیستم کنترل دمای اتاق.

سیستم کنترل ربات

امروزه کاربرد ربات‌ها در صنایع مختلف تا حدی افزایش یافته است که تصور حذف این سیستم‌ها امری غیرعملی به نظر می‌رسد. در واقع ربات‌ها امکان انجام کارهایی را که برای انسان خطرناک یا بسیار یکنواخت و خسته کننده‌اند فراهم کرده‌اند و قادرند که تمام این کارها را بدون خطا و در کمترین زمان به انجام برسانند. با توجه به اینکه برخی از ربات‌ها برای انجام کارهای انسان طراحی شده‌اند، بنابراین طراحی آن‌ها نیز به‌گونه‌ای است که مانند انسان دارای دست، بازو، مچ و حتی انگشت هستند. یکی از کاربردهای مهم ربات‌ها در صنایع بسته‌بندی خودکار است. در یک سیستم بسته‌بندی نمونه، هدف آن است که با بیشترین سرعت و کمترین خطا محصولات سالم از ناسالم تشخیص داده شده و هریک در بخش مخصوصی بسته‌بندی شوند. در شکل ۱-۸، نمایی از یک سیستم بسته‌بندی خودکار توسط یک بازوی ربات و مبتنی بر اطلاعات تصویری نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، محصولات تولیدشده بر روی یک نوار نقاله حرکت کرده و تصویر آن‌ها توسط یک دوربین ضبط می‌شود. سپس با بهره‌گیری از اطلاعات تصویر، وجود عیب در هر محصول تشخیص داده شده و بر آن اساس، بازوی ربات اقدام به برداشتن و قرار دادن آن محصول در جایگاه مناسب می‌کند. در این سیستم، معمولاً بخش کنترل‌کننده یک کامپیوتر قدرتمند است که بر اساس اطلاعات دریافتی از سنسورها (دوربین، موقعیت کنونی ربات و غیره)، وضعیت محصول را تشخیص داده و ربات را برای انجام عمل مناسب کنترل می‌کند.



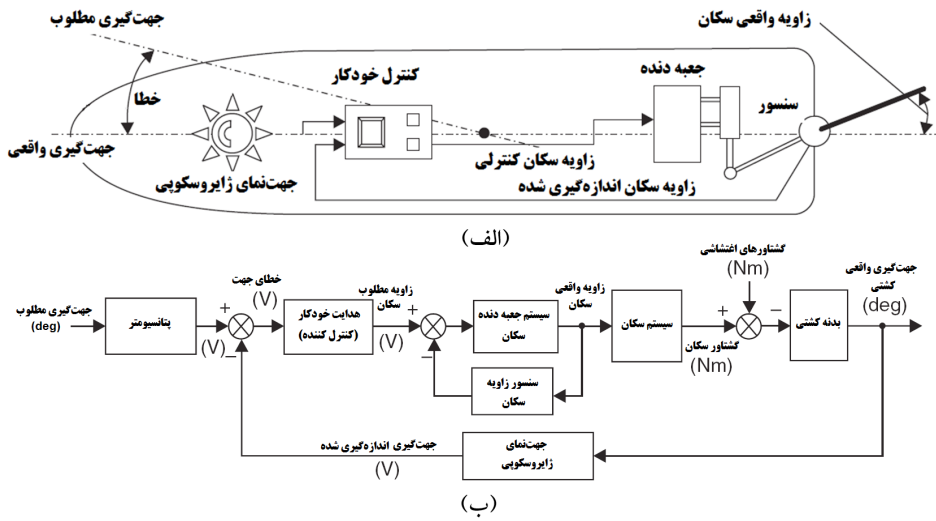
شکل ۱-۷. سیستم کنترل دمای آب توسط انسان در هنگام استحمام.



شکل ۱-۸. سیستم کنترل حلقه‌بسته ربات در فرایند بسته‌بندی خودکار.

سیستم کنترل حرکت خودکار کشتی

برای اینکه یک کشتی بتواند در یک مسیر مشخص و با سرعت و زاویه معینی حرکت کند، سیستم کنترل خودکار کشتی طراحی می‌شود. این سیستم باید به‌گونه‌ای طراحی شود که با وجود عوامل محیطی ناخواسته (اغتشاش) مانند امواج دریا، باد و جریان‌های آبی بتواند اهداف تعیین‌شده فوق را برآورده کند. ساختار یک سیستم کنترل حرکت خودکار کشتی در شکل ۱-۹-الف نشان داده شده است. در این سیستم، جهت دماغه کشتی توسط قطب‌نمای ژایروسکپی (سنسور) اندازه‌گیری شده و با جهت موردنظرِ تعیین‌شده توسط ناخدا مقایسه می‌شود. سپس بر اساس مقدار خطای محاسبه‌شده، کنترل‌کننده مقدار زاویه مناسب برای سکان را تعیین می‌کند. سپس توسط سنسورهای مناسب زاویه کنونی سکان اندازه‌گیری شده و با فرمان به جعبه‌دنده، زاویه سکان برای رسیدن به مقدار مطلوب تنظیم می‌شود. بلوک دیاگرام مربوط به بخش‌های مختلف سیستم کنترل خودکار کشتی در شکل ۱-۹-ب نشان داده شده است.



شکل ۱-۹. سیستم کنترل کشتی، (الف) بدنه کشتی، (ب) بلوک دیاگرام کنترلی.

پیوست الف: تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس ابزاري قدرتمند برای تحلیل دسته خاصی از سیستم‌های دینامیکی یعنی سیستم‌های خطیِ تغییرناپذیر با زمان است. اصولاً هر جاکه از تبدیلی استفاده مي‌شود، کاهش پیچیدگی مسئله و سهولت حل آن یکی از اهداف مهم آن است. تبدیل لاپلاس هم از این قاعده مستثنا نیست. در واقع تبدیل لاپلاس مسئله را از فضای زمان (t) به فضای لاپلاس (s) منتقل می‌کند. مهم‌ترین مزیت این تبدیل آن است که معادلات دیفرانسیل خطی در حوزه زمان، به معادلات ساده جبری در فضای s تبدیل می‌شوند. بنابراین، به‌راحتی می‌توان با بهره‌گیری از ابزارهای جبری، مسئله موردنظر را حل و پاسخ را در حوزه s محاسبه کرد. سپس با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس، پاسخ موردنظر در فضای زمان (t) تعیین می‌شود.

تعریف تبدیل لاپلاس: تبدیل لاپلاسِ تابع $f(t)$، $\forall t \in [0,\infty)$ و با فرض $f(t)=0$ به ازای $t<0$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (۱\text{-}۱)$$

که s یک متغیر مختلط بوده، $s=\sigma+j\omega$، و اپراتور لاپلاس نامیده می‌شود.

مثال ۱-۱

فرض کنید $f(t)$ تابع پله واحد باشد، $f(t)=1$، $\forall t \geq 0$. آنگاه:

$$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty} 1e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

مثال ۱-۲

تبدیل لاپلاس تابع نمایی $f(t)=e^{-at}$، $\forall t \geq 0$ را تعیین کنید:

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt=-\frac{e^{-(a+s)t}}{s+a}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s+a}$$

ویژگی‌ها و قضایای تبدیل لاپلاس

بهره‌گیری از ویژگی‌های منحصربه‌فرد تبدیل لاپلاس باعث می‌شود که کاربرد این ابزار در بسیاری موارد مانند محاسبه عکس تبدیل، ساده‌تر شود.

خطی‌بودن: اگر $f_1(t)$ و $f_2(t)$ توابعی از زمان و k_1 و k_2 مقادیر ثابت باشند:

$$\mathcal{L}\left[k_1 f_1(t) \pm k_2 f_2(t)\right] = k_1 F_1(s) \pm k_2 F_2(s) \qquad (۲\text{-}۱)$$

ویژگی مشتق‌گیری

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \qquad (۳\text{-}۱)$$

و در حالت کلی داریم:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-1} f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (۴\text{-}۱)$$

که در آن $f^{(i)}(0)$، معرف مشتق مرتبه i-ام تابع $f(t)$ در $t = 0$ است.

ویژگی انتگرال‌گیری

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(r)dr\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad (۵\text{-}۱)$$

ویژگی شیفت در زمان

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\right] = e^{-as}F(s), \quad \forall a \geq 0 \qquad (۶\text{-}۱)$$

ویژگی شیفت در فرکانس

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a) \qquad (۷\text{-}۱)$$

ویژگی کانوولوشن

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s)F_2(s) \qquad (۸\text{-}۱)$$

قضیه مقدار اولیه: مقدار تابع $f(t)$ در لحظه $t = 0^+$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad (۹\text{-}۱)$$

که در آن $t = 0^+$، یعنی کوچک‌ترین زمان بزرگ‌تر از 0.

قضیه مقدار نهایی: این قضیه، رفتار حالت ماندگار یا مقدار نهایی تابع $f(t)$ را به رفتار تبدیل لاپلاس آن، $F(s)$، در همسایگی $s = 0$ مرتبط می‌سازد:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \qquad (۱۰\text{-}۱)$$

به شرطی که $sF(s)$ هیچ قطبی روی محور موهومی یا سمت راست آن نداشته باشد.

مثال ۱-۳

تبدیل لاپلاس $f(t) = \cos(\omega t), t \geq 0$ را بیابید.

پاسخ: از رابطه اویلر داریم، $\cos(\omega t) = 0.5\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$. بنابراین با استفاده از ویژگی خطی بودن و نیز نتیجه مثال ۲، داریم:

$$F(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

مثال ۱-۴

تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{-at}\cos(\omega t), t \geq 0$ را بیابید.

پاسخ: با استفاده از ویژگی شیفت فرکانسی و نتیجه مثال ۱-۳، داریم:

$$F(s) = \mathcal{L}\left[e^{-at}\cos(\omega t)\right] = \left.\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right|_{s\to s+a} = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

در جدول ۱-۱، توابع مهم و پایه همراه با تبدیل لاپلاس آن‌ها نشان داده شده‌اند.

جدول ۱-۱. تبدیل لاپلاس توابع پایه و پرکاربرد.

	$f(t)$	$F(s)$
۱	$\delta(t)$ (تابع ضربه واحد)	1
۲	$u(t)$ (تابع پله واحد)	$\frac{1}{s}$
۳	$t\,u(t)$ (تابع شیب واحد)	$\frac{1}{s^2}$
۴	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۵	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
۶	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
۷	$f(at)$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
۸	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
۹	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
۱۰	$\delta^{(n)}(t)$	s^n

عکس تبدیل لاپلاس

محاسبه عکس تبدیل لاپلاس توسط انتگرال مختلط زیر انجام می‌گیرد:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds, \quad \forall t > 0 \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

که در آن c، یک مقدار حقیقی دلخواه است و بزرگ‌تر از مقدار حقیقی تمام نقاط تکین $F(s)$ انتخاب می‌شود. توجه داشته باشید که محاسبه انتگرال فوق عموماً کار بسیار پیچیده‌ای به نظر می‌رسد. بنابراین، در عمل برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس از روش‌های ساده‌تري استفاده می‌شود که مبتنی بر ویژگی‌های آن است.

تجزیه به کسرهای جزئی

تحلیل مسائل کنترلی با استفاده از ابزار تبدیل لاپلاس، عمدتاً به یک پاسخ گویا منجر می‌شوند که باید تبدیل لاپلاس معکوس آن محاسبه شود. یک تابع گویای $F(s)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

که A و B چندجمله‌ای‌هایی از s هستند. ریشه‌های چندجمله‌ای $B(s)$ را صفرهای تابع F(s) و ریشه‌های چندجمله‌ای $A(s)$ را قطب‌های تابع $F(s)$ می‌نامند. همچنین، در یک تابع گویا اگر درجه چندجمله‌ای صورت کوچک‌تر از درجه مخرج باشد $(m<n)$، آن را اکیداً مناسب (اکیداً سره) می‌نامند. اگر درجه صورت برابر با درجه مخرج باشد $(m=n)$، تابع را مناسب و در غیر این صورت آن را نامناسب می‌نامند.

در روش تجزیه به کسرهای جزئی، فرض می‌کنیم که تابع $F(s)$ اکیداً مناسب است $(m<n)$. در غیر این صورت لازم است که در ابتدا چندجمله‌ای صورت را بر مخرج تقسیم کرده و سپس روش را اعمال کنیم.

حالت ۱: تابع $F(s)$ دارای قطب‌های مجزا (غیرتکراری) باشد.

در این صورت تابع $F(s)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}=\frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}+\ldots+\frac{k_n}{s+p_n}$$

که در آن، p_i ها ریشه‌های مخرج تابع (اعداد حقیقی/ مختلط)اند. آنگاه مقادیر k_i به‌صورت زیر قابل‌محاسبه‌اند:

$$k_i=(s+p_i)F(s)\Big|_{s=-p_i} \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

مثال ۱-۵

تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید:

$$F(s)=\frac{2s^3+8s^2+7s+2}{s^3+4s^2+3s}$$

پاسخ: با توجه به اینکه تابع فوق اکیداً مناسب نیست، ابتدا تقسیم می‌کنیم:

$$F(s)=2+\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}=2+\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$$

بنابراین، با بهره‌گیری از ویژگی‌ها و روش اخیر داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=2\delta(t)+\mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left[\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}\right]}_{F_2(s)}$$

برای محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس $F_2(s)$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F_2(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+3}$$

که در آن:

$$k_1=sF_2(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0}=\frac{2}{3}$$

$$k_2=(s+1)F_2(s)\big|_{s=-1}=\left.\frac{s+2}{s(s+3)}\right|_{s=-1}=-\frac{1}{2}$$

$$k_3=(s+3)F_2(s)\big|_{s=-3}=\left.\frac{s+2}{s(s+1)}\right|_{s=-3}=-\frac{1}{6}$$

بنابراین، نتیجه نهایی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=2\delta(t)+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t},\quad \forall t\geq 0$$

حالت ۲: تابع $F(s)$ دارای قطب‌های تکراری باشد.

بدون اینکه کلّیت مسئله از بین برود، فرض کنید r قطب از n قطب تابع $F(s)$ تکراری بوده و (p_1) بقیه غیرتکراری باشند. آنگاه:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\underbrace{\frac{k_1}{(s+p_1)^r}+\frac{k_2}{(s+p_1)^{r-1}}+\ldots+\frac{k_r}{(s+p_1)}}_{\text{r repeated poles}}+\underbrace{\frac{k_{r+1}}{s+p_{r+1}}+\ldots+\frac{k_n}{s+p_n}}_{\text{(n-r) distinct poles}}$$

ضرایب مربوط به ریشه‌های غیرتکراری $\{k_{r+1},\ldots,k_n\}$ ، با روش قبل تعیین می‌شوند. ضرایب مربوط به ریشه‌های مکرر به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$k_i=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}\Big[(s+p_1)^r F(s)\Big]_{s=-p_1},\quad i=1,\ldots,r \tag{۱۳-۱}$$

مثال ۱-۶

تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید:

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

پاسخ: با بهره‌گیری از روش اخیر داریم:

$$F(s)=\left[\frac{k_1}{(s+1)^3}+\frac{k_2}{(s+1)^2}+\frac{k_3}{(s+1)^1}\right]+\left[\frac{k_4}{s}\right]+\left[\frac{k_5}{s+2}\right]$$

ضرایب را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

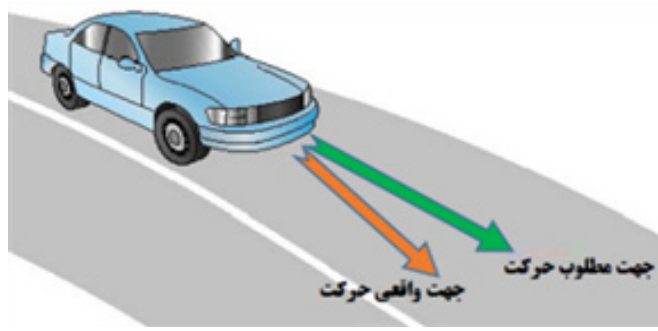
$$\begin{cases}k_1=(s+1)^3F(s)\big|_{s=-1}=-1\\ k_2=\dfrac{d}{ds}\Big[(s+1)^3F(s)\Big]_{s=-1}=0\\ k_3=\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{ds^2}\Big[(s+1)^3F(s)\Big]_{s=-1}=-1\\ k_4=sF(s)\big|_{s=0}=\dfrac{1}{2}\\ k_5=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

بنابراین، نتیجه می‌شود:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)} + \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}, \qquad \forall t \geq 0$$

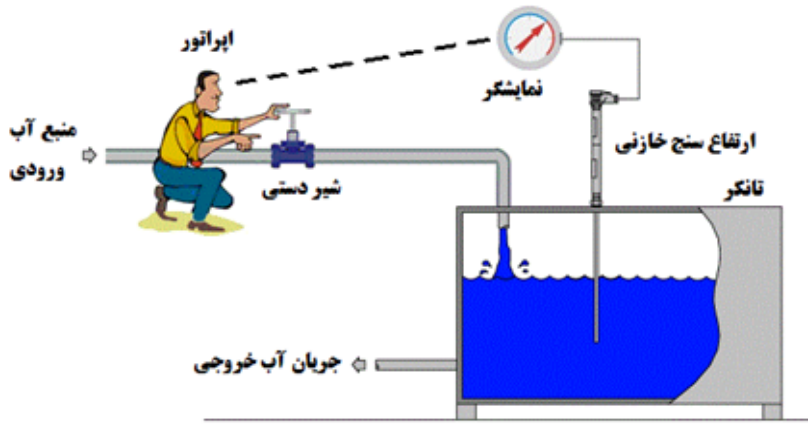
مسائل

۱. فرایند یک رانندگی ساده را در نظر بگیرید. فرض کنید تنها ابزار کنترلی در دست راننده، فرمان خودرو باشد و راننده تنها از طریق مشاهده، فرایند رانندگی را انجام دهد (شکل ۱-۱۰). یک ساختار بلوکی برای توصیف سیستم کنترل حلقه‌بسته رسم کنید و عملکرد آن را شرح دهید. بخش‌های مربوط به سیستم، کنترل‌کننده و سنسور را مشخص کنید.



شکل ۱-۱۰. فرایند رانندگی.

۲. شکل ۱-۱۱، یک سیستم کنترل سطح مایع اپراتوری را نشان می‌دهد. بر اساس اطلاعات نشان‌داده‌شده در شکل، ابتدا ساختار بلوکی سیستم کنترل حلقه‌بسته را رسم کنید و عملکرد آن را شرح دهید. سپس ساختاری برای حذف اپراتور و انجام کنترل خودکار سطح مایع پیشنهاد دهید.



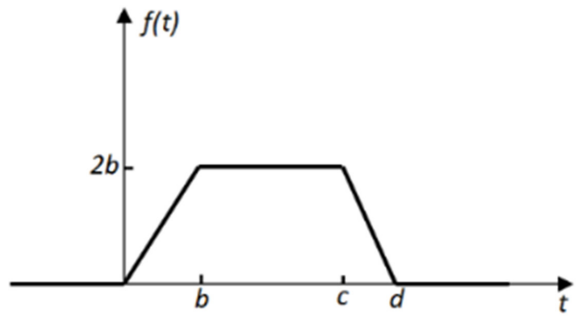
شکل ۱-۱۱. فرایند کنترل دستی سطح مایع در تانکر.

۳. تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید:

الف. $f_1(t) = t^2 \sin(\omega t), \quad \forall t \geq 0$

ب. $f_2(t) = e^{-2t} \cos(\omega t + \theta), \quad \forall t \geq 0$

ج. تابع $f_3(t)$ با ضابطه نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۱۲.



شکل ۱-۱۲. تابع $f_3(t)$.

۴. برای توابع زیر، ابتدا بررسی کنید که آیا شرط قضیه مقدار نهایی در مورد آن‌ها برقرار است یا خیر. سپس مقدار نهایی توابع را بیابید.

الف. $f_1(t) = t^2 e^{-t}, \quad \forall t \geq 0$

ب. $f_2(t) = e^{-2t} \cos(\omega t), \quad \forall t \geq 0$

ج. $f_3(t) = \sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t), \quad \forall t \geq 0$.

۵. تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

الف. $F_1(s) = \dfrac{s^2 - 1}{s^3 + s^2 + s}$

ب. $F_2(s) = \dfrac{s + 4}{(s+3)^3 (s+2)^2 (s+1)}$

ج. $F_3(s) = \dfrac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{s^2 + 3s + 2}$.

۵. معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کرده و پاسخ را در حوزه زمان تعیین کنید.

الف. $\ddot{y} + 10\dot{y} + 100y = 1 + 0.1\sin(t),\ \ (y(0) = \dot{y}(0) = 0)$

ب. $\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = 1,\ \ (y(0) = \dot{y}(0) = 0), (0 < \xi < 1), (\omega_n > 0)$

ج. $\ddot{y} + 4y = \delta(t),\ \ (y(0) = \dot{y}(0) = 0)$.